第十一届 CMC 数学类 A 组试题分析

尚镇冰

2019 年 10 月 27 日

第一题是喜闻乐见的解几送分题，考点是椭球的几何性质以及旋转曲面的定义。其实这个题本质上是高中大家都学过的椭圆的定义，因为我们分析题目条件就能得到 S 上任意一点到两球心的距离之和是一个定值，只是放在三维空间中考虑时需要做一个旋转，于是就成了椭球。而第二问根据高中的知识可知答案自然是焦点。

第二题是一道典型的 CMC 竞赛题，从给出的条件来看这道题是想考察各种中值定理的运用，以及函数构造的技巧。但官方给出的标准答案在后半程却显得太绕且不具有一般性，事实上直接证明要简洁得多。首先根据题目给出的式子我们想到将其表示为 $F(x) = xf(x) + \alpha(f(x) - \int_0^x f(u)\mathrm{d}u)$ 的导数的形式，然后取 $f(x)$ 的最大值点 x_0，通过分类讨论 f 的单调性情况与运用积分中值定理，直接证明 $F(x_0)$ 是正的 (大家不妨自己试试)，然后由拉格朗日中值定理直接证明题目结论。

第三题乍一看是一道送分题，实际做了之后也发现的确如此。首先注意到证明矩阵 $M = I - A\bar{A}$ 的特征多项式实等价于证明：若 λ 是 M 的特征值，则 $\bar{\lambda}$ 是 M 的特征值。类比证明 Hermite 矩阵的特征值必为实数时所用的两边取共轭转置的操作，我们这里对两边取共轭，即得到：若 λ 是 $M = I - A\bar{A}$ 的特征值，则 $\bar{\lambda}$ 是 $\bar{M} = I - \bar{A}A$ 的特征值，然后运用 AB 与 BA 的特征值相同这个熟知的小结论，即知 $\bar{\lambda}$ 亦为 M 的特征值，证毕。这道题可以类比八一赛 A 组第 2 题的证明华罗庚不等式，两个题都用到上述的小结论，但我认为这题难度不如八一赛 A 组第 2 题那道题。

第四题也是一道比较容易的高等代数题，核心考点就一个：实对称矩阵的合同标准型与正交相似标准型。我们设正定二次型 $f-1$ 对应的矩阵 A, V 的中任一二次型 f 对应矩阵是 B。通过合同变换与正交相似变换我们可将 A 化成单位矩阵 I，将 B 化为对角矩阵 $\Lambda = diag(a_1, \cdots, a_n)$，之后问题便

迎刃而解。总得来说又是一道套路满满的高代题目。可以看到，相似/合同标准型的考察一直是 CMC 的一个重点，同时也是高等代数解题的一个最重要的技巧与思想：如果是实对称矩阵，那么尽量通过正交相似/合同来简化问题；如果是一般的矩阵，那么尽量往 Jordan 标准型上靠。事实上 CMC 的许多题目都能用这种套路破解，这题尤其明显，所以希望以后在高代方面命题组还是能多推陈出新，让高等代数题达到应有的难度与区分度。

第五题是一道典型的 CMC 风格的数列题，也具备 CMC 数分应有的难度。其核心考点是 $\epsilon - \delta$ 语言的熟练运用与数学归纳法。前者考验大家分析的基本功底，后者是数列题中常用的技巧

第六题第一问是送分题，直接二阶导数大于等于 0，因此是凸函数，不解释；第二问的上下界容易想出：注意到 $f(x)$ 递减，且题目中的式子实际上只有 $n-1$ 个变元，故考虑当 $n-1$ 个点都趋于 $+\infty$ 时，第 n 个点自然趋于 $-\infty$, 原式极限为 1，这应当是 E 的下确界；当 $n-1$ 个点都趋于 $-\infty$ 时，第 n 个点趋于 $+\infty$，故原式极限为 $n-1$，这应当是 E 的上确界。至于在想清楚思路后，如何严谨地证明它们确实是上确界与下确界，以及证明 2 个端点处取不到，这就是考验自己的数学分析功底的地方了。事实上最终的证明依赖了第一问的不等式，以及 $f(x)+f(-x)=1$ 这样一个小的观察。