int main()

/*Keep on going never give up*/

第十一届全国大学生数学竞赛十套模拟试题

Math Competition Problem Solving

作者：Hoganbin

Email：hoganbin1995@outlook.com

微信公众号：八一考研数学竞赛

更新：August 9, 2019

版本：3.08

只有当自己想去做一件事的时候才能把事情做好！

目　录

第 1 章 模拟卷第 1 套

一、 **填空题**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=$______.
2. $y=\arctan(x^2)+e^x\tan x$，则 $y'=$______.
3. 设由 $x^y=y^x$ 确定 $y=y(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$______.
4. $y=\cos^2 x$，则 $y^{(n)}=$______.
5. $\displaystyle\int\frac{1-x}{x^2}e^x\mathrm{d}x=$______.
6. $\displaystyle\int_0^1\frac{x\arctan(x^2)}{1+x^4}\mathrm{d}x=$______.
7. 圆 $\begin{cases}2x+2y-z+2=0\\ x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z\leq 19\end{cases}$ 的面积为______.
8. 设 $z=f(2x-y,\dfrac{x}{y})$,f 可微,$f_1'(3,2)=2$，$f_2'(3,2)=3$,则 $\mathrm{d}z\,\big|_{(x,y)=(2,1)}=$______.

二、 设 a 为正常数，使得 $x^2\leqslant e^{ax}$ 对一切正数 x 成立，求常数 a 的最小值.

三、 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$$

求证：存在 $\xi\in(0,1)$ ，使得 $\displaystyle\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x=0$

四、 过原点作曲线 $y=-\ln x$ 的切线，求该切线、曲线 $y=-\ln x$ 与 x 轴所围的图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

六、 求二重积分

$$\iint\limits_D(\cos^2x+\sin^2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D:x^2+y^2\leq 1,x\geqslant 0,y\leqslant 0.$

第 2 章 模拟赛第 2 套

一、 若 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，其中 $f(u)$ 有连续的二阶导数，求 z.

二、 求原点到曲面 $(x-y)^2-z^2=1$ 的最短距离.

三、 当 $x>0,y>0,z>0$ 时，求函数 $u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值，并证明：对任意正实数 a,b,c 有 $ab^2c^3\leq 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$ 成立.

四、 判断下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$　　(2) $\dfrac{1}{1^p}-\dfrac{1}{2^q}+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{4^q}+\cdots$

五、 设正项级数 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $b_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\geq\delta$（$\delta>0$ 为常数），证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

六、 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{8n^2-4n-1}$ 的和.

七、 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}$ 的和函数，并求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,(n+1)}{2^{n-1}}$

八、 把 $f\,(x)=\dfrac{1}{2}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+\dfrac{1}{2}\arctan x$ 展开成 x 的幂级数.

九、 求解下列微分方程：

(1) $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)\mathrm{d}x+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0$

(2) $xy'\ln x\cdot\sin y+\cos y\,(1-x\cos y)=0$

(3) $\begin{cases} x\left(y'+1\right)+\sin(x+y)=0\\ y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0\end{cases}$

十、 求 xoy 平面上一曲线，使其过每点的切线同该点的向径及 oy 轴一起构成一个等腰三角形.

第 3章 模拟赛第 3 套

一、 确定正整数 n ，使极限 $I=\lim \dfrac{\int_{\sin x}^{0}\left(1+t^{2}\right)^{\frac{1}{\arcsin t}} \mathrm{d} t}{e^{-x} \sin^{n} x}$ 存在，并求出此极限.

二、 讨论由 $\ln \sqrt{x^{2}+y^{2}}=\arctan \dfrac{y}{x}$ 在区域 $D=\left\{(x, y) \left\lvert\, y<\dfrac{x}{2}, x>0\right.\right\}$ 内确定的隐函数 $y=f(x)$ 的极值点的极值，并说明是极大值还是极小值.

三、 设 $y=f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有二阶导数且 $f'(0)=0$，证明：存在 $\xi_{1}, \xi_{2}, \xi_{3} \in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ，使得

$$\frac{\pi}{2} \xi_{2} \cdot f''\left(\xi_{3}\right) \cdot \sin \left(2 \xi_{1}\right)=f'\left(\xi_{1}\right)$$

四、 求极限 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} u_{n}$，其中 $u_{n}=\left(1+\dfrac{1}{n^{2}}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^{2}}\right) \cdots\left(1+\dfrac{n-1}{n^{2}}\right)\left(1+\dfrac{n}{n^{2}}\right)$.

五、 若 $z=\int_{xy}^{x^{2}+u^{2}} \sin t \mathrm{d} t$,$u=u(x, y)$ 可微，求 $\mathrm{d} z$.

六、 一质点在力 $\vec{F}=\vec{F}(y+z, z+x, x+y+g(x, y))$ 作用下沿曲线 $\Gamma: AB$ 运动，$A=A(1,0,0), B=B(2,3,3)$ 。已知 $\int_{\Gamma} g(x, y) \mathrm{d} z=-1$ ，求这个过程中 $\vec{F}$ 所做的功 W .

七、 平面 π_{1} 为椭球面 $\dfrac{x^{2}}{4}+\dfrac{y^{2}}{4}+z^{2}=1$ 在点 $A(1,1, \dfrac{1}{2})$ 处的切平面，平面 π_{2} 是此椭球面的另一切面，切点为 B . π_{2} 平行于 π_{1} ，求以点 A, B 及 $C(2,0,0)$ 为顶点的三角形的面积.

八、 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}\right) x^{2 n}$ 的收敛半径及其和函数的单调性及凸性.

九、 求曲线 $C: y=f(x)=\int_{0}^{1}|x-t| \mathrm{d} t,\ x \in[0,1]$ 绕 x 轴旋转所成的曲面的表面积

十、 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内有二阶导数，$x_{0}=\dfrac{a+b}{2},\ \left|f''(x)\right| \leq 1,\ \forall x \in [a, b]$, 估计近似公式 $\int_{a}^{b} f(x) \mathrm{d} x=f\left(x_{0}\right)(b-a)$ 的误差.

第 4 章 模拟卷第 4 套

一、 **填空题（每小题 5 分，共 40 分）**

1. 设当 $x \to 1$ 时，$1 - \dfrac{m}{1+x+\cdots x^{m-1}}$ 是 $x-1$ 的等价无穷小，则 $m =$______.

2. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数部分，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{|x|} - 2[x]\right) =$______.

3. 已知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线在 y 轴上的截距为-1,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n =$____.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x^{\frac{k}{n}}}{n+k} =$______.

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}} =$ ______.

6. 已知曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在 $(0,1)$ 处的法线方程______.

7. 设 $y = f(x)$ 为连续函数，且 $\displaystyle\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t = x$ ，则 $f(7)=$ ______.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\dfrac{1}{(n+i+1)^2} + \dfrac{1}{(n+i+2)^2} + \cdots \dfrac{1}{(n+i+i)^2}\right] =$ ______.

二、 设 $y = f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上三次可微，证明存在实数 $\xi \in (a,b)$ ，使得

$$\frac{f'''(\xi)}{6} = \frac{f(1)-f(-1)}{2} - f'(0)$$

三、 设在闭区间上具有连续的二阶导数，证明存在实数，使得

$$\frac{4}{(b-a)^2}\left[f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] = f''(\xi)$$

四、 设 $y = f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 2$ ，令

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t & (x>0) \\ \dfrac{\int_0^x \ln(1+2t)\,\mathrm{d}t}{x} & (x<0) \\ 0 \quad (x=0) \end{cases}$$

求 $F'(0)$.

第 5 章 模拟赛第 5 套

一、 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x-1}\right)}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$

二、 讨论 $f(x)=|x|\sin x$ 在 $x=0$ 处二阶导性.

三、 求证：$x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x=1$ 在 $(0,1)$ 内必有唯一根 $x_n(n=2,3,\cdots)$，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

四、 $z=uv+\arcsin w$，其中 $u=e^x, v=\cos y$ ，$w=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，求 $\mathrm{d}z$.

五、 设 $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x} t\,|t|\,\mathrm{d}t(x\geq -1)$ 求 $f(x)$ 与 x 轴围成封闭圆形的面积

六、 在曲面 $z=\sqrt{2+x^2+4y^2}$ 上求一点，使它到平面 $x-2y+3z=1$ 的距离最短.

七、 证明：$0<x<1$ 时 有 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\leq\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$.

八、 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的和函数，并指出其收敛域.

九、 设空间曲线 C 是由立方体 $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1, 0\leq z\leq 1$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 相交面构成，试计算

$$\left|\oint_c (z^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}x\right|$$

十、 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使

$$f'(\xi)=\frac{a-b}{2\eta}f'(\eta)$$

第 6章 模拟赛第 6 套

一、 设 L_1, L_2 为两条直线，L_1 的方程为：$\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-5}{3}$，$L_2$ 过点 $(2,-3,-1)$ 且与 x 轴正向夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，与 z 轴正向夹锐角，求 L_2 的方程

二、 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上点到平面 $x+4y+6z=30$ 的最远距离和最近距离.

三、 若正项级数 $\{x_n\}$ 单调上升且有上界，试证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}})$ 收敛 .

四、 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{2n\sin\frac{1}{n}}a_n\right)=1$ ，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

五、 设函数 $f(x)$ 可微，且对任何实数 a,b 满足 $f(a+b)=e^a f(b)+e^b f(a)$，且 $f'(0)=e$ 。求 $f(x)$.

六、 求由曲面 $z=x^2+y^2, z=2(x^2+y^2)$ ，$y=x, y=x^2$ 所围立体的体积.

七、 求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在区域 $x^2+y^2+z^2\le x+y+z$ 内的平均值.

注：$\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v}{V_{\Omega}}$ 称为 $f(x,y,z)$ 在 Ω 内的平均值

八、 求密度为 ρ 的均匀圆柱 $x^2+y^2\le a^2, z=\pm h$ 对于直线 $x=y=z$ 的转动惯量.

九、 计算

$$\oiint\limits_{S}(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $S:|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ ，外侧为正.

第 7 章 模拟赛第 7 套

一、 计算

$$I=\iint_{D}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1$

二、 设 $p(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负连续函数，$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调递增，证明：

$$\int_a^b f(x)\cdot p(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)\cdot p(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\cdot g(x)\cdot p(x)\mathrm{d}x$$

三、 求证：

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-u^2}\cdot f(u)du$$

四、 计算由曲面 $\Sigma:(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$ 所围立体的体积，其中 $h>0,\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq 0$

五、 计算

$$I=\iiint_{\Omega}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}v$$

其中 Ω ：由 yoz 面上的区域 D 绕 z 轴旋转一周而成的空间区域，其中 $D+\{(y,z)\,|y^2+z^2\leq 1,z\geq 2y-1,y>0,z>0\}$.

六、 已知球上任一点的密度与该点到球的距离成正比，求球关于切线的转动惯量.

七、 设 $du=(3x^2-2xy+y^2)\mathrm{d}x-(x^2-2xy+3y^2)\mathrm{d}y$，求 $u(x,y)$.

八、 证明：若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在光滑曲线 C 上连续，则

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leq M\cdot\bar{s}$$

其中 $\bar{s}$ 是 C 的弧长，$M=\max\limits_{(x,y)\in C}\{\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\}$.

九、 计算

$$\int_C x\sqrt{x^2-y^2}\mathrm{d}s$$

其中 C 为双扭线 $(x^2+y^2)^2=h^2(x^2-y^2)$ 的右半部分 $(x\geqslant 0)$.

第 8 章 模拟赛第 8 套

一、 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，$f(a)=f(b)=0$，求证：

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{4}\max_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right|$$

二、 设函数在 $[0,1]$ 上连续，求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 |f(x)|^n \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}$$

三、 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}\mathrm{d}x$

四、 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$ 连续，$\Omega_r: x^2+y^2+z^2\le r^2(0<r\le 1)$，求极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{3}{r^3}\iiint\limits_{V_r} f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

五、 证明：若 Σ 是光滑闭曲面，$\vec{l}$ 是任意常向量，则有

$$\oiint\limits_{\Sigma}\cos(\vec{n},\vec{l})\mathrm{d}s=0$$

其中 $\vec{n}$ 是曲面 Σ 的外法线。

六、 试确定 a 值，使方程 $\dfrac{x^2}{2}-\ln(1+x^2)=a$ 在 $[-1,1]$ 上有两个相异的实根.

七、 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内大于零并满足，又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1$，$y=0$ 所围成的图形 S 的面积为 2，求函数 $y=f(x)$ 及图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积。

八、 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，且对 $x>1$ 时，有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$，证明：(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\le 1+\dfrac{\pi}{4}$

九、 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$，$a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$，证明级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$ 收敛，并求其和。

十、 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$.

第 9 章 模拟卷第 9 套

一、 计算下列不定积分

(a). $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

(b). $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$

(c). $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$

二、 求下列定积分的值

(a). $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^\alpha}\mathrm{d}x$(其中 α 为任意常数)

(b). $\displaystyle\int_0^1 t\,|t-x|\,\mathrm{d}t$

(c). $\displaystyle\int_0^\pi \sin^{n-1}x\cos{(n+1)x}\mathrm{d}x$

三、 求广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}\mathrm{d}x \quad (\text{其中}\alpha\neq 0)$$

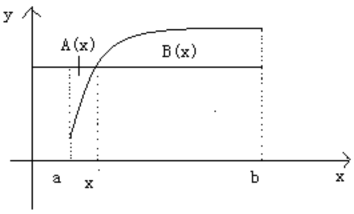
四、 设函数满足：$f'(x)=g(x), g'(x)=2e^x-f(x), f(0)=0, g(0)=2$，求

$$\int_0^\pi\left(\frac{g\,(x)}{1+x}-\frac{f\,(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x$$

五、 设 $f(x)$ 连续，且常数 $a>0$，证明

$$\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

六、 设 $f(x)$ 在上可导，且 $f'(x)>0, f(a)>0$。试证：对图中所示两个面积函数



$A(x), B(x)$，存在唯一的 $\xi\in[a,b]$, $s.t.\dfrac{A\,(\xi)}{B\,(\xi)}=2009.$

七、 在平面 $x+y+z+1=0$ 内，求一直线，使它通过直线 $\begin{cases} y+z+1=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$ 与平面的交点，且与已知直线垂直.

第 10章 模拟卷第 10 套

一、 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调减少，$f(x)>0$. 证明：对满足的 $0<\alpha<\beta<1$ 任何 α,β ，有：

$$\beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x>\alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$$

二、 从抛物线 $y=x^2-1$ 上的点 P 引抛物线 $y=x^2$ 的切线，证明该切线与 $y=x^2$ 所围成的面积与 P 点的位置无关。

三、 讨论下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\ (p>0)$$

四、 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个实数，并满足：$a_1-\dfrac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{a_n}{2n-1}=0$ ，证明：方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一实根

五、 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), x<0\\ 1, x=0\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t, x>0\end{cases}$ ，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

六、 设 m,n 为正整数，且其中至少有一个为奇数，证明：$\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}x^my^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

七、 设有一容器内有 100L 溶液，其中含有 5 kg 的净盐，若每分钟向容器以匀速注入 3L 净水，同时以每分钟 2L 的速度放出浓度均匀的溶液。问：过程开始后一个小时，溶液中还有多少净盐？