2020 年考研数学（一二三）模拟试题

满分：150 分，考试时间：180 分钟

题 号	选择题 1 ~ 8	填空题 9 ~ 14	解答题 15 ~ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

注意事项: 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效;

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

一、选择题 (第 1~8 题，每题 4 分，共 32 分.)

1. 当 $x \to +\infty$ 时，$f(x) = (x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1} - \frac{1}{6}$ 是 $g(x) = \alpha x^\beta$ 等价无穷小，则 $\alpha, \beta =$ （　）
A. $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -1$ B. $\alpha = \frac{1}{8}, \beta = -1$ C. $\alpha = \frac{1}{8}, \beta = -2$ D. $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -2$

2. 设 $g(t)$ 是正值连续函数，且 $f(x) = \int_{-a}^{a} |x-t| g(t)\,\mathrm{d}t, a > 0, x \in [-a, a]$，关于曲线 $y = f(x)$，下列说法正确的是 （　）
A. 在 $[-a, 0]$ 上是凹的，在 $[0, a]$ 上是凸的. B. 在 $[-a, a]$ 上是凹的.
C. 在 $[-a, 0]$ 上是凸的，在 $[0, a]$ 上是凹的. D. 在 $[-a, a]$ 上是凸的.

3. 设 $y = f(x)$ 是微分方程 $y'' - 2y' + 4y = -\mathrm{e}^{\sin x}$ 的一个解，若 $f(x_0) > 0, f'(x_0) = 0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 （　）
A. 某邻域内单调增加. B. 取得极大值
C. 某邻域内单调减少. D. 取得极小值

4. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 的敛散性为 （　）
A. 条件收敛 B. 绝对收敛 C. 发散 D. 无法判断

5. 设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$，其中 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵，下列有四个命题：

(1)若 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解，则 $r(A) \geq r(B)$;

(2)若 $r(A) \geq r(B)$，则 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解;

(3)若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，则 $r(A) = r(B)$;

(4)若 $r(A) = r(B)$，则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

以上命题中正确的是 （　）
A. (1)(2) B. (1)(3) C. (2)(4) D. (3)(4)

6. 设 A,P 均为 3 阶方阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 Q^TAQ 为 ( )

A. $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

7. 某工厂急需 12 只集成电路装配仪表，现要到外地采购，已知该型号集成电路的不合格品率为 0.1，问需要采购几只才能以 99% 的把握保证其中合格的集成电路不少于有 12 只? ( )

A. 16 B. 17 C. 18 D. 20

8. 设随机事件 A,B,C 两两相互独立且满足条件 $P(ABC)=0$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)$ ( )

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{6}$

二、填空题 (第 9~14 题，每题 4 分，共 24 分.)

9. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限中的切线______，使它被两坐标轴所截的线段最短.

10. 设 $a_n=\int_0^{n\pi}x\,|\sin x|\mathrm{d}x$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)$ 的和______

11. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}z\cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$______，其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0, R>0$ 且 $x,y,z\in\mathbb{R}$.

12. 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+|x|)\sqrt{|x(1-x)|}}\mathrm{d}x=$______.

13. 设 A 是三阶方阵，I 是三阶单位矩阵，且 $|A+I|=0,|A+2I|=0,|A+3I|=0$，则 $|A+4I|=$______.

14. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $P(X<-1)=P(X\ge 3)=\Phi(-1)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $\mu=$______,$\sigma=$______.

三、解答题 (第 15~23 题，共 94 分.)

15. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 具有连续的导数，且 $f(1)=0, f'(1)=2$，求 $\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}$

16. (本题满分 10 分)

设函数 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，且 $f(1)=0, f'(1)=1$，若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续二阶导数，求 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 的最大值.

17. (本题满分 10 分)

设某 A 从 Oxy 平面的原点出发，沿 x 轴正方向前进；同时某 B 从点 $(0,b)$ 开始追踪 A，即 B 的运动方向永远指向 A 并与 A 保持等距 b，试求 B 的光滑运动轨迹.

18. (本题满分 10 分)

计算曲面积分

$$\iiiint\limits_{D} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-w^2}{1+x^2+y^2+z^2+w^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}w$$

其中 D 为 $x^2+y^2+z^2+w^2 \le 1, x, y, z, w \ge 0$.

19. 本题满分 10 分)

设 $x \in [-1,1]$，对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有 $a_n = \dfrac{1}{3n+4} - \dfrac{3}{3n+2} + \dfrac{2}{3n+1}$，试证：

(1) $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^3-3t+2}{1-x^3t^3}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{3n}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \int_0^1 \frac{t^3-3t+2}{1-x^3t^3}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2-t-t^2}{1+t+t^2}\mathrm{d}t$，由此推出 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ 的值.

20. (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = (a_{ij})_{(n-1)\times n}$ 的行向量组的转置都是方程组 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ 的解，M_i 是矩阵 A 中化去第 i 列剩下的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式，试证：

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i M_i = 0$ 的充要条件是 A 的行向量组的转置不是方程组 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ 的基础解系；

(2)若 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i M_i = 1$，试求每个 M_i 的值.

21. (本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1)求参数 a 以及此二次型对应矩阵的特征值;

(2)指出 $f(x_1,x_2,x_3) = 1$ 表示何种曲面.

22. (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0,1,1,\rho)$，试求：

(1) $E[\max\{X,Y\}]$;

(2)协方差 $\mathrm{Cov}(X-Y, XY)$ 以及相关系数 $\mathrm{Corr}(X-Y, XY)$.

23. (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma) = \frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty$$

其中 $\sigma \in (0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自总体 X 的简单随机样本.

(1)求 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}$;

(2)求 $E(\hat{\sigma})$ 和 $D(\hat{\sigma})$.