2020 年考研数学（一二三）模拟试题解析

满分：150 分，考试时间：180 分钟

题 号	选择题 1 ∼ 8	填空题 9 ∼ 14	解答题 15 ∼ 23	总 分
满 分	32	24	94	150
得 分				

注意事项: 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效;

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

一、选择题 (第 1∼8 题，每题 4 分，共 32 分.)

1. 当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=(x^3-x^2+\frac{1}{2}x)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}-\frac{1}{6}$ 是 $g(x)=\alpha x^{\beta}$ 等价无穷小，则 $\alpha,\beta=$ ( )
A. $\alpha=\frac{1}{2},\beta=-1$ B. $\alpha=\frac{1}{8},\beta=-1$ C. $\alpha=\frac{1}{8},\beta=-2$ D. $\alpha=\frac{1}{2},\beta=-2$

2. 设 $g(t)$ 是正值连续函数，且 $f(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|g(t)\,\mathrm{d}t, a>0, x\in[-a,a]$，关于曲线 $y=f(x)$，下列说法正确的是 ( )
A. 在 $[-a,0]$ 上是凹的，在 $[0,a]$ 上是凸的. B. 在 $[-a,a]$ 上是凹的.
C. 在 $[-a,0]$ 上是凸的，在 $[0,a]$ 上是凹的. D. 在 $[-a,a]$ 上是凸的.

3. 设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-2y'+4y=-e^{\sin x}$ 的一个解，若 $f(x_0)>0, f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 ( )
A. 某邻域内单调增加. B. 取得极大值
C. 某邻域内单调减少. D. 取得极小值

4. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{a_na_{n+1}}$ 的敛散性为 ( )
A. 条件收敛 B. 绝对收敛 C. 发散 D. 无法判断

5. 设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，其中 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，下列有四个命题：

(1)若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $r(A)\ge r(B)$;

(2)若 $r(A)\ge r(B)$，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解;

(3)若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $r(A)=r(B)$;

(4)若 $r(A)=r(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

以上命题中正确的是 ( )
A. (1)(2) B. (1)(3) C. (2)(4) D. (3)(4)

6. 设 A,P 均为 3 阶方阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 Q^TAQ 为 ( )

A. $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

7. 某工厂急需 12 只集成电路装配仪表，现要到外地采购，已知该型号集成电路的不合格品率为 0.1，问需要采购几只才能以 99% 的把握保证其中合格的集成电路不少于有 12 只？ ( )

A. 16 B. 17 C. 18 D. 20

8. 设随机事件 A,B,C 两两相互独立且满足条件 $P(ABC)=0$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)$ ( )

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{6}$

答案 BBBBBBBB

二、填空题 (第 9~14 题，每题 4 分，共 24 分.)

9. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限中的切线______，使它被两坐标轴所截的线段最短.

答案 $\frac{x}{\sqrt{a(a+b)}}+\frac{y}{\sqrt{b(a+b)}}=1$

10. 设 $a_n=\int_0^{n\pi}x\,|\sin x|\mathrm{d}x$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)$ 的和______.

答案 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

11. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$______，其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\le R^2,z\ge 0,R>0$ 且 $x,y,z\in\mathbb{R}$.

答案 $\frac{\pi}{2}\left(1-\cos R^2\right)$

12. 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+|x|)\sqrt{|x(1-x)|}}\mathrm{d}x=$______.

答案 $2+\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2})}$

13. 设 A 是三阶方阵，I 是三阶单位矩阵，且 $|A+I|=0,|A+2I|=0,|A+3I|=0$，则 $|A+4I|=$______.

答案 6

14. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $P(X<-1)=P(X\ge 3)=\Phi(-1)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $\mu=$______,$\sigma=$______.

答案 1,2

三、解答题 (第 15~23 题，共 94 分.)

15. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 具有连续的导数，且 $f(1)=0, f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}$

解: 利用导数的定义得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)}{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}&=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)-f\left(1\right)}{\left(\sin^2 x+\cos x\right)-1}\cdot\frac{\left(\sin^2 x+\cos x\right)-1}{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}\\&=f'(1)\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-2\sin^2\frac{x}{2}}{\mathrm{e}^{x^2}-1+1-\cos x}\\&=2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}-\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}+\dfrac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

16. (本题满分 10 分)

设函数 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，且 $f(1)=0, f'(1)=1$，若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续二阶导数，求 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 的最大值.

解: 记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $z=r^2f(r^2)$，即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\left[f\left(r^2\right)+r^2f'\left(r^2\right)\right],\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y\left[f\left(r^2\right)+r^2f'\left(r^2\right)\right]$$

计算二阶偏导数有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=2f\left(r^2\right)+2f'\left(r^2\right)\left(r^2+4x^2\right)+4x^2r^2f''\left(r^2\right)\\\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=2f\left(r^2\right)+2f'\left(r^2\right)\left(r^2+4y^2\right)+4y^2r^2f''\left(r^2\right)\end{aligned}$$

代入条件 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 可得

$$r^4f''\left(r^2\right)+3r^2f'\left(r^2\right)+f\left(r^2\right)=0$$

令 $u=r^2, v=f(u)$，即可化简为欧拉方程

$$u^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}\mathrm{d}u^2+3u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+v=0$$

设 $u=\mathrm{e}^t$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v=0$$

解得 $f(u)=\dfrac{\ln u}{u}$，可知 $f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 的最大值.

17. (本题满分 10 分)

设某 A 从 Oxy 平面的原点出发，沿 x 轴正方向前进；同时某 B 从点 $(0,b)$ 开始追踪 A，即 B 的运动方向永远指向 A 并与 A 保持等距 b，试求 B 的光滑运动轨迹.

解: 设在时刻 t 时 A 位于 $(f(t),0)$. 其中 $f(0)=0$，且 $f(t)$ 是关于 t 的严格单调增函数. 设在时刻 t 时 B 位于 $(P(t),Q(t))$, 其中 $P(0)=0, Q(0)=b$. 不妨设 $b\neq 0$，否则 B 的运动将与 A 重合。

根据对称性假设 $b>0$，由于 B 的路径光滑，因此关于 t 的函数 P,Q 均连续可微的，由题意知 B 的方向一直指向 A，因此

$$(P'(t),Q'(t))=k(f(t)-P(t),-Q(t)).\tag{1}$$

其中 $k>0$. 由于 A,B 间距始终为 b, 因此

$$[P(t)-f(t)]^2+Q(t)^2=b^2. \tag{2}$$

当 $Q(t)\neq 0$ 时,$Q'(t)$ 也不为 0. 此时将式 (1) 代入 (2) 可得

$$(P'(t))^2+(Q'(t))^2=b^2k^2=b^2\frac{Q'(t)^2}{Q(t)^2}. \tag{3}$$

于是我们就得到了微分方程

$$(\frac{P'(t)}{Q'(t)})^2+1=\frac{b^2}{Q(t)^2}\Rightarrow(\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}Q(t)})^2+1=\frac{b^2}{Q(t)^2}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{y}.$$

令 $\dfrac{b}{y}=\cosh a$，其中 $a\in\mathrm{R}^+$，即有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}=\frac{-b\tanh a}{\cosh a},\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\sinh a.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}=b\,(\tan\mathrm{h}a)^2=b-b\,(\tan\mathrm{h}a)'\Rightarrow x=ba-b\tan\mathrm{h}a+C.$$

即

$$x=b\cosh^{-1}\frac{b}{y}-b\tanh(\cosh^{-1}\frac{b}{y})+C.$$

将初始条件 $x=0,y=b$ 代入，解得 $C=0$. 因此 B 的光滑轨迹为

$$x=b\cosh^{-1}\frac{b}{y}-b\tanh(\cosh^{-1}\frac{b}{y})=\frac{b}{2}\ln\frac{b+\sqrt{b^2-y^2}}{b-\sqrt{b^2-y^2}}-\sqrt{b^2-y^2}.$$

当 $Q(t)=0$ 时, 易得 B 已经和 A 同在 x 轴上运动.

18. (本题满分 10 分)

计算曲面积分

$$\iiiint\limits_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-w^2}{1+x^2+y^2+z^2+w^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}w$$

其中 D 为 $x^2+y^2+z^2+w^2\leq 1, x,y,z,w\geq 0$.

解: 令

$$\begin{cases} x=r\cos\psi \\ y=r\sin\psi\cos\varphi \\ z=r\sin\psi\sin\varphi\cos\theta \\ w=r\sin\psi\sin\varphi\sin\theta \end{cases}$$

此时有

$$J=\frac{\partial\,(x,y,z,w)}{\partial\,(r,\psi,\varphi,\theta)}=r^3\sin^2\psi\sin\varphi, x^2+y^2+z^2+w^2=r^2$$

且有

$$D=\left\{(r,\psi,\varphi,\theta)\,|0\leq\psi,\varphi,\theta\leq\frac{\pi}{2},0\leq r\leq 1\right\}$$

$$\iiiint\limits_{D}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-w^2}{1+x^2+y^2+z^2+w^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}w=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r^3\sin^2\psi\sin\varphi\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi\mathrm{d}\psi\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r^3\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\pi^3}{16}\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r^2\mathrm{d}r^2=\frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

19. 本题满分 10 分)

设 $x\in[-1,1]$，对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有 $a_n=\dfrac{1}{3n+4}-\dfrac{3}{3n+2}+\dfrac{2}{3n+1}$，试证：

(1) $f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{t^3-3t+2}{1-x^3t^3}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{3n}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1^-}f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\int_0^1\frac{t^3-3t+2}{1-x^3t^3}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{2-t-t^2}{1+t+t^2}\mathrm{d}t$，由此推出 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 的值.

证明:

(1)可知

$$\int_0^1\frac{t^3-3t+2}{1-x^3t^3}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(t^3-3t+2\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n}t^{3n}\right)\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n}\left(t^{3(n+1)}-3t^{3n+1}+2t^{3n}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n}t^{3(n+1)}\right)\mathrm{d}t-3\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n}t^{3n+1}\right)\mathrm{d}t+2\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n}t^{3n}\right)\mathrm{d}t$$

由于 $\displaystyle\sum_{+\infty}^{n=0}|x^{3n}|$ 收敛，故上式三项都可以进行逐项积分，即有

$$\int_0^1\frac{t^3-3t+2}{1-x^3t^3}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1t^{3(n+1)}\mathrm{d}t\right)x^{3n}-3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1t^{3n+1}\mathrm{d}t\right)x^{3n}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1t^{3n}\mathrm{d}t\right)x^{3n}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3n+4}x^{3n}-3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3n+2}x^{3n}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3n+1}x^{3n}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3n+4}-\frac{3}{3n+2}+\frac{2}{3n+1}\right)x^{3n}$$

即证.

(2)由于

$$a_n=\frac{1}{3n+4}-\frac{3}{3n+2}+\frac{2}{3n+1}=\frac{2}{(3n+4)(3n+2)(3n+1)}\ (\forall n\in\mathbb{N})$$

即级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 收敛，从而 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\in\mathbb{R}$，又有幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{3n}$ 的收敛半径为 1，则有

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3n+4}-\frac{3}{3n+2}+\frac{2}{3n+1}\right)y^n=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}a_ny^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$$

(3)由于

$$\left|\int_0^1 \frac{t^3-3t+2}{1-x^3t^3}\mathrm{d}t-\int_0^1 \frac{2-t-t^2}{1+t+t^2}\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 \left|\frac{t^3-3t+2}{1-x^3t^3}-\frac{2-t-t^2}{1+t+t^2}\right|\mathrm{d}t$$
$$=\left(\int_0^1 \frac{t^3(1-t)(2+t)}{(1-x^3t^3)(1+t+t^2)}\mathrm{d}t\right)(1-x^3)$$

由于

$$0 \le \frac{t^3(1-t)(2+t)}{(1-x^3t^3)(1+t+t^2)}\begin{cases} =0, t=1 \\ <\dfrac{t^3(1-t)(2+t)}{(1-t^3)(1+t+t^2)}=\dfrac{t^2(2+t)}{(1+t+t^2)^2}, t\ne 1\end{cases}$$

即

$$0 \le \frac{t^3(1-t)(2+t)}{1-x^3t^3(1+t+t^2)} < 3\,(\forall t\in[0,1])$$

于是

$$\left|\int_0^1 \frac{t^3-3t+2}{1-x^3t^3}\mathrm{d}t-\int_0^1 \frac{2-t-t^2}{1+t+t^2}\mathrm{d}t\right| \le 3\left(1-x^3\right)$$

因此可证

$$\lim_{x\to 1^-}\int_0^1 \frac{t^3-3t+2}{1-x^3t^3}\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{2-t-t^2}{1+t+t^2}\mathrm{d}t$$

根据上一问的结论可得

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n=\int_0^1 \frac{2-t-t^2}{1+t+t^2}\mathrm{d}t=-1+3\int_0^1 \frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}t=-1+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

20. (本题满分 11 分)

设矩阵 $A=(a_{ij})_{(n-1)\times n}$ 的行向量组的转置都是方程组 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$ 的解，M_i 是矩阵 A 中化去第 i 列剩下的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式，试证：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i M_i=0$ 的充要条件是 A 的行向量组的转置不是方程组 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$ 的基础解系；

(2)若 $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i M_i=1$，试求每个 M_i 的值.

证明:

(1)考虑矩阵

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n}\end{pmatrix}$$

然后按第一行展开得

$$|M|=-\sum_{i=1}^{n}(-1)^i M_i$$

由易知 $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i}M_i=0\Leftrightarrow |M|=0\Leftrightarrow r(M)\le n-1$，现把 M 每一列加到第一列，有

$$M=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n}\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}n&1&\cdots&1\\0&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n}\end{pmatrix}=N$$

可知 M 的第一行不可被其他 $n-1$ 行线性表出，从而 $r(M)\le n-1\Leftrightarrow r(A)\le n-2$，即 A 的行向量组的转置不是方程组 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$ 的基础解系；

(2)由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i}M_i=1$，即 $|M|=-1$，则 M 可逆，于是

$$M\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow M^{-1}\begin{pmatrix}n\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

由于 $|M|=-1$，即

$$M^{-1}\begin{pmatrix}n\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\frac{M^*}{|M|}\begin{pmatrix}n\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow M^*\begin{pmatrix}n\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\\vdots\\-1\end{pmatrix}$$

则 $nM_{1i}=-1$，也就有 $(-1)^{1+i}M_i=-\frac{1}{n}$，所以 $M_{\mathrm{i}}=\frac{(-1)^i}{n}$.

21. (本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1)求参数 a 以及此二次型对应矩阵的特征值;

(2)指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面.

解:

(1)二次型 f 的矩阵

$$\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&a\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-5&3\\0&2&1\\0&0&a-3\end{pmatrix}$$

由于 f 的秩为 2，即 A 的秩也为 2，因而 $a=3$，则此时 A 的多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda & -1 & 3\\ -1 & 5-\lambda & -3\\ 3 & -3 & 3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[\frac{r_1}{4-\lambda}]{r_1+r_2}(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 5-\lambda & -3\\ 3 & -3 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 6-\lambda & -3\\ 3 & -6 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$$

因此 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9.$

(2)由题设可知必存在正交变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

其中 P 为正交矩阵，使得二次型在新变量 y_1,y_2,y_3 下称标准形

$$f=4y_2^2+9y_3^2$$

于是曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=1$

$$\Leftrightarrow g(y_1,y_2,y_3)=1\Leftrightarrow 4y_2^2+9y_3^2=1$$

这表明准线是 y_2Oy_3 平面上椭圆、母线平行 y_1 轴的椭圆柱面.

22. (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0,1,1,\rho)$，试求：

(1) $E[\max\{X,Y\}]$;

(2)协方差 $\mathrm{Cov}(X-Y,XY)$ 以及相关系数 $\mathrm{Corr}(X-Y,XY)$.

解:

(1)利用二维正态分布的性质，由于

$$\max\{X,Y\}=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|),E(X)=E(Y)=0$$

即

$$E[\max\{X,Y\}]=\frac{1}{2}E(X+Y+|X-Y|)=\frac{1}{2}[E(X)+E(Y)+E(|X-Y|)]=\frac{1}{2}E(|X-Y|)$$

因 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0,1,1,\rho)$，有

$$E(X)=E(Y)=0,\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)=1,\mathrm{Corr}(X,Y)=\rho$$

可得

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}\,\mathrm{Corr}(X,Y)=\rho$$

则 $X-Y$ 服从正态分布，且

$$E(X-Y)=0,\mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-2\,\mathrm{Cov}(X,Y)=2-2\rho$$

即 $X-Y$ 服从正态分布 $N(0,2-2\rho)$，其密度函数为

$$p(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(2-2\rho)}}e^{-\frac{z^2}{2(2-2\rho)}}$$

所以

$$\begin{aligned}E[\mathrm{m}\{X,Y\}]&=\frac{1}{2}E(|X-Y|)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(2-2\rho)}}e^{-\frac{z^2}{2(2-2\rho)}}dz\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi(2-2\rho)}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2(2-2\rho)}}dz=\frac{1}{2\sqrt{\pi(1-\rho)}}\cdot[-(2-2\rho)]e^{-\frac{z^2}{2(2-2\rho)}}\Big|_0^{+\infty}\\&=\frac{1}{2\sqrt{\pi(1-\rho)}}\cdot(2-2\rho)=\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}\end{aligned}$$

(2)因 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}},-\infty<x,y<+\infty$$

则由对称性知

$$\begin{aligned}E(X^2Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2y\frac{1}{2\sqrt{\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dxdy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy^2\frac{1}{2\sqrt{\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dxdy\\&=E(XY^2)\end{aligned}$$

且 $E(X)=E(Y)=0$，故协方差与相关系数分别为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X-Y,XY)&=E[(X-Y)XY]-E(X-Y)E(XY)\\&=[E(X^2Y)-E(XY^2)]-[E(X)-E(Y)]E(XY)=0\end{aligned}$$

$$\mathrm{Corr}(X-Y,XY)=\frac{\mathrm{Cov}(X-Y,XY)}{\sqrt{\sqrt{\mathrm{Var(X\text{-}Y)}}\sqrt{\mathrm{Var(XY)}}}}=0$$

23. (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 X 的简单随机样本.

(1)求 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}$;

(2)求 $E(\hat{\sigma})$ 和 $D(\hat{\sigma})$.

解:

(1)由题设可知其似然函数为

$$L=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma)=\frac{1}{(2\sigma)^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}}$$

取对数

$$\ln L=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma}=0-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0\Rightarrow\sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

故最大似然估计量为

$$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

(2)易得

$$\begin{aligned}E(\hat{\sigma})&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x;\sigma)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sigma}\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x=\sigma\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sigma}\right)=\sigma\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&=\sigma\Gamma(2)=\sigma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(\hat{\sigma})&=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D|X_i|=\frac{1}{n}D|X|=\frac{1}{n}\left[E|X|^2-(E|X|)^2\right]=\frac{1}{n}\left[E\left(X^2\right)-\sigma^2\right]\\&=\frac{1}{n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x-\sigma^2\right]=\frac{1}{n}\left[\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x-\sigma^2\right]\\&=\frac{\sigma^2}{n}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sigma}\right)-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\sigma^2}{n}\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t-\frac{\sigma^2}{n}\\&=\frac{\sigma^2}{n}\Gamma(3)-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$