第十一届全国大学生数学竞赛河南赛区决赛试卷

(非数学类, 2019 年 11 月 16 日)

绝密 ★ 启用前

考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
满 分	25	10	10	10	10	10	10	15	100
得 分									

注意：1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

准考证号：　姓名：　学校：　省市：

题 答 要 不 内 线 订 装

得分	
评阅人	

一、填空题 (本题满分 25 分，每题 5 分)

1. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\left[\tan t+\ln\left(1+t^2\right)\sin\frac{1}{t}\right]\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x\ln(1+\arctan t)\,\mathrm{d}t}=$ ____________.

2. 函数 $\dfrac{1+2x+3x^2}{(1+x+x^2+x^3)^2}$ 的麦克劳林级数中 x^{2019} 项的系数是 ____________.

3. 设直线 L 的极坐标方程为 $r=\theta$, 则曲线 L 在点 $(r,\theta)=(\pi,\pi)$ 处的曲率半径为 ____________.

4. 设曲线 L：$\begin{cases}\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{2}=1\\ y-2z+4=0\end{cases}$, 则 $u=\cos^2(xy)+\dfrac{y}{z^2}$ 在点 $(0,0,1)$ 处沿直线 L 的正向 $\mathbf{n}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}=$ ____________.(规定：L 与 z 轴正向的夹角为锐角的方向为 L 的正向).

5. 设 $\Gamma:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 方向为逆时针方向, 则 $\displaystyle\oint_\Gamma\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=$ ____________.

得分	
评阅人	

二、解答题（本题满分 10 分）

设 $z=z(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，$w=w(u,v)$ 是由方程组

$$u=x^2+y^2,\quad v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad z=\mathrm{e}^{w+x+y}$$

所确定的隐函数。试将方程 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$ (其中 $x\neq y$) 化成 $\dfrac{\partial w}{\partial u},\dfrac{\partial w}{\partial v}$ 所满足的关系式.

得分	
评阅人	

三、解答题（本题满分 10 分）

计算广义积分：

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$$

得分	
评阅人	

四、解答题（本题满分 10 分）

一容器中盛有 120 升的盐水，并有 75 克盐溶解在溶液中. 如果每升 1.2 克盐的盐水以每分钟 2 升的速度流入该容器并以相同速度从该容器中流出 (该过程中持续搅动以保持混合物浓度恒定)，求 1 小时后容器中剩余的盐量. (已知 $\mathrm{e}^{-1}=0.37$)

装 订 线 内 不 要 答 题

得分	
评阅人	

五、解答题 (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数, 且 $f(a)=f(b)$，证明：

$$\max_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right| \geq \frac{4}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

省市：________ 学校：________ 姓名：________ 准考证号：________

装 订 线 内 不 要 答 题

得分	
评阅人	

六、解答题（本题满分 10 分）

设 $a_1=1,\cdots,a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}(n=1,2,\cdots)$

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 收敛，并求此极限.

(2) 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛.

得分	
评阅人	

七、解答题（本题满分 10 分）

设曲线 L：$\begin{cases} y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面为 Σ，而 Ω 是由曲面 Σ 和平面 $z=-1, z=1$ 所围成的空间区域. 求：

(1) 三重积分 $I = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(2) 曲面积分 $J = \iint\limits_{\Sigma} x^3 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3 \,\mathrm{d}z\mathrm{d}x - z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 取外侧.

得分	
评阅人	

八、解答题（本题满分 15 分）

设 $\dfrac{1}{1-x-x^2}$ 的麦克劳林展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(1) 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}} x^n$ 的和 A.

(2) 证明：对 $n=1,2,\ldots$, 方程 $(1-\cos x)^n = \dfrac{1}{A}\cos x$在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有且仅有一个实根.

装 订 线 内 不 要 答 题