

# 第十一届全国大学生数学竞赛河南赛区决赛试卷

(数学类, 2019 年 11 月 16 日)

绝密 ★ 启用前

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满分	25	10	10	10	10	10	10	15	100
得分									

注意: 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

## 一、填空题 ( 本题满分 25 分, 每题 5 分)

1. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3\sqrt{n}}$  的收敛域是 \_\_\_\_\_.

2. 曲线  $L$  是以原点为圆心的上半单位圆周, 则  $\int_L \max(x, y) ds$  \_\_\_\_\_.

3. 设  $a$  是参数,  $f(x) = \begin{cases} x^a \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  的导函数在  $x = 0$  连续的条件是 \_\_\_\_\_.

4. 实二次型  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_1)^2$  的正惯性指数为 \_\_\_\_\_.

5. 平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  与三个坐标轴夹角相等的充要条件是 \_\_\_\_\_.

得分	
评阅人	

## 二、解答题 ( 本题满分 10 分)

在空间直角坐标系中，过  $x$  轴和  $y$  轴分别做动平面，其夹角为  $\alpha$ (常数)，求两平面交线的轨迹方程，并指出它是什么曲面.

得分	
评阅人	

三、解答题 ( 本题满分 10 分)

$\mathbf{R}^4$  是具有通常内积的欧氏空间, 设  $W$  是方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间, 求  $W$  在  $\mathbf{R}^4$  中的正交补  $W^\perp$  的一组标准正交基.

得分	
评阅人	

四、解答题 ( 本题满分 10 分)

求函数  $f(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x}$  的最大值，并证明你的结论.

装  
订  
线  
内  
不  
要  
答  
题

省市：\_\_\_\_\_ 学校：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 准考证号：\_\_\_\_\_

装 订 线 内 不 要 答 题

得分	
评阅人	

五、解答题 ( 本题满分 10 分)

设  $X, Y$  是同阶方阵, 定义  $[X, Y] = XY - YX$ . 证明: 对任意 2 阶复矩阵  $A, B, C$  有  $[[A, B]^2, C] = 0$ .

得分	
评阅人	

六、解答题 ( 本题满分 10 分)

讨论正整数  $p, q$  满足什么条件时, 广义积分

$$I(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^p x - \cos^q x}{x} dx$$

收敛.

得分	
评阅人	

七、解答题 ( 本题满分 10 分)

设  $V$  是复数域  $\mathbb{C}$  上的  $n$  维线性空间,  $n \geq 3$ .

1. 求  $V$  上的所有线性变换的不变子空间个数的最小值.
2. 如果  $\phi$  是  $V$  上的线性变换, 使得  $\phi$  的不变子空间个数最少, 求  $\phi$  的矩阵的 Jordan 标准形.

得分	
评阅人	

八、解答题 ( 本题满分 15 分)

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导,  $f(a) = f(b) = 0$ , 且  $\forall x \in (a, b)$ , 有  $f''(x) + f(x) \geq 0$ . 若  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_0) > 0$ , 证明:  $b - a \geq \pi$