第四部分《多元函数微分学》——数学考研真题集

微信公众号：八一考研数学竞赛

1. (2019. 北京师范大学) 已知函数 $f(x)=x^2y^2z^2$，求其在

$$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$$

上的最值.

2. (2018. 北京师范大学) 设 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，记 $F(x,y)=f\left(xy,\dfrac{x^2-y^2}{2}\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

3. (2018. 北京师范大学) 求 $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ 在条件 $D:x^2+y^2\leqslant 25$ 下的极值.

4. (2018. 北京大学) 设 $y=\varphi(x)$ 在零点可导，且 $\varphi(0)=0$，f 在 $(0,0)$ 附近二阶连续可微，且 $\nabla f\left(x,\varphi(x)\right)=0$，$f$ 在 $(0,0)$ 的 Hessian 半正定非零，求证：f 在 $(0,0)$ 取极小值.

5. (2018. 中国科学院大学) 判断 (并证明) 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性.

6. (2019. 南开大学) 设函数 $f(x,y,z)=2x^2+2xy+2y^2-3z^2$，$\bar{l}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，动点 P 在曲面 $x^2+2y^2+3z^2=1$，求方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\,|_{(P)}$ 的最大值.

7. (2018. 南开大学) 求 $f(x)=4\ln x+x^2-6x$ 的极值.

8. (2018. 南开大学) 已知二元函数 $f(x,y)=x\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})-\sqrt{x^2+y^2}$，证明

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

9. (2019. 天津大学) 求 $e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{y}{z}}=1$ 在 $(\ln 2,\ln 2,1)$ 处的法向量.

10. (2019. 天津大学) 已知 $z=xe^x\cos xy-1$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\,|_{(1,0)}$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}\,|_{(1,0)}$.

11. (2018. 天津大学) 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2y-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，则 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$

12. (2018. 天津大学) 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t, g(t)=\begin{cases} e^t, & t\geqslant 0 \\ (1-t)^{\frac{1}{t^2}}e^t, & t<0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 的连续性与可微性.

13. (2018. 天津大学) 设 $y=y(x)$ 由隐函数 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

14. (2019. 浙江大学) 计算对于函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续的充分必要条件是，对于 $\mathbb{R}$ 上的任意 a,b 点集

$$E_1=\left\{x:f(x)>a\right\},E_2\left\{x:f(x)<b\right\}$$

都是开集合.

15. (2019. 浙江大学) 函数定义在 $\mathbb{R}^2$ 上，若满足 (1)$f(x,y)$ 分别关于 x,y 连续；(2) 若 K 在 $\mathbb{R}^2$ 上的紧集，则 $f(\mathbb{R})$ 比为 $\mathbb{R}^2$ 中的紧集；证明 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数.

16. (2018. 浙江大学) 设函数集合

$$S=\left\{f(x)\left|\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}\right|<+\infty,m,n\in\mathbb{N}\right.\right\}$$

若 $f(x)\in S$，求证 $\hat{f}(x)\in S$，其中 $\hat{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-ixt}\mathrm{d}t,f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(t)\mathrm{e}^{ixt}\mathrm{d}t.$

17. (2019. 兰州大学) 计算曲面积分已知 $f(x),g(x)$ 为有界闭区域 $\overline{\Omega}\subset R^n\,(n\geqslant 2)$，开区 Ω 可微，证明：$\forall x\in\overline{\Omega}\setminus\Omega$，有 $f(x)=g(x)$，则 $\exists x_0\in\Omega$，使得 $\nabla f(x_0)=\Delta g(x_0)$.

18. (2018. 兰州大学) 已知 $a,b>0$，设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{ax^2+by^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

试讨论 $f(x,y)$ 在原点的连续性与可微性.

19. (2019. 东南大学) 叙述二元函数可微，可偏导，方向可导之间的关系.

20. (2019. 东南大学) 求由 $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z-8=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

21. (2018. 东南大学) 设二元函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，在 P_0 取极小值，证明黑塞矩阵 $H_f(P_0)$ 半正定.

22. (2019. 上海交通大学) 若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上可全微分，且 $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$，则 $f(x,y)$ 在 D 为常值函数.

23. (2019. 华东师范大学) 设 $u=x+y+z,S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$，$\vec{n}$ 为球面 S 的外侧法向量. 求 $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\mathbf{n}}}$ 的表达式及 $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\mathbf{n}}}$ 在 S 上的最值.

24. (2019. 华东师范大学) 设 $f(x,y)=\begin{cases}y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ 证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处连续，并讨论其偏导数的存在性及可微性.

25. (2018. 华东师范大学) 设函数 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+g(\dfrac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 二阶连续可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

26. (2019. 厦门大学) 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{y}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\quad(\alpha>0)$$

试讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性与可微性.

27. (2019. 大连理工大学) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续可微，$f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)}=\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)}=0$，且 $g(x,y)$ 连续，求证：$f(x,y),g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处处可微.

28. (2019. 大连理工大学) 求 $f(x,y)=ax+by+cz$ 在 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最大值与最小值.

29. (2019. 电子科技大学) 已知 $u=x^y\ln z$，求全微分 $\mathrm{d}z$.

30. (2019. 电子科技大学) 已知 $x+y-z=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}$.

31. (2019. 武汉大学) 已知 $f(x,y)=x^yy^x$，求 $f(x,y)$ 的全微分.

32. (2019. 武汉大学) 若 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 连续，存在单射 g：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$，使得 $f\times g=C$，其中 C 为常数.

33. (2019. 中山大学) 求 $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},(a,b>0)$ 的极大值点和极小值点.

34. (2019. 中山大学) 证明二元泰勒公式的唯一性：若

$$\sum_{i+j=0}^{n}A_{ij}x^iy^j+o(\rho^n)=0\,(\rho\to 0)$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，求证 $A_{ij}=0(i,j$ 为非负整数，$i+j=0,1,\cdots,n)$.

35. (2018. 中山大学) 设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ 所确定，求 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}$.

36. (2018. 中山大学) 讨论函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x+y+z=1$ 下的最值.

37. (2019. 湖南大学) 若 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 有偏导但不可微.

38. (2018. 华南理工大学) 试在变换 $u=x+y,v=x-y$ 及 $z=w-2xy$ 下，将方程 $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}=0$ 变成 $w=w(u,v)$ 满足的方程.

39. (2018. 华南理工大学) 求曲线 $x^2+xy+y^2+2x-2y-12=0$ 上的点到原点的距离的极值.

40. (2018. 华南理工大学) 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域中有连续的偏导数 f_y，在该点存在偏导数 f_x，试证 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微.

41. (2018. 南京大学) 设 $f(x,y)=x^2+y^2-y^{99}$，求 f 的临界值，并讨论临界值是否能成为局部极值或全局极值.

42. (2018. 四川大学) 设 f_x,f_y 在 $(0,0)$ 点附近存在，且在 $(0,0)$ 点可微，证明：$f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$.

43. (2018. 中国科学技术大学) 已知 $u(x,t)$ 具有二阶连续偏导，且满足 $u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)$，记 $F(t)=\int_t^{2-t}\left(u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\right)\mathrm{d}x$，证明：$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$.

44. (2018. 中南大学) 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数，令

$$g(t,\alpha)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$$

若对任何 α 都有 $\left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{t=0}=0$且$\cdot\left.\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right|_{t=0}>0$，证明：$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值.