第五部分《多元函数积分学》——数学考研真题集

微信公众号：八一考研数学竞赛

1. (2019. 北京师范大学) 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，证明：

$$F_n(x)=\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\mathrm{d}t$$

关于 x 在任意闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

2. (2019. 北京师范大学) 设 $f(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2, g(x)=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$，证明：$f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$.

3. (2019. 北京师范大学) 求第一型曲线积分

$$\iint_S z(x+y)\mathrm{d}S$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 被 $z=1$ 截取的上半部分.

4. (2019. 中国科学院大学) 求曲面 $z=x^2+y^2+1$ 上任意一点的切平面与 $z=x^2+y^2$ 所围区域体积.

5. (2019. 南开大学) 求曲面积分

$$\iint_S y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

其中 S 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与曲面 $x^2+y^2=1$ 以及三坐标面在第一象限所围立体的外侧.

6. (2018. 南开大学) 计算二重积分

$$\iint_D \mathrm{e}^{x+2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中区域 $D=(x,y)|x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+2y\leqslant 1$

7. (2018. 南开大学) 求曲线积分

$$\int_L (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}x$$

其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 x 轴正向看，L 为逆时针方向.

8. (2019. 天津大学) 求 $\iiint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2, z=h$ 与 $z=a\,(a>h>0)$ 相夹的部分

9. (2019. 天津大学) 计算曲面

$$\iiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Σ 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(b>a>0)$

10. (2018. 天津大学) 直线 $y=2x, x=2y, x+y=3$ 所围成的图形面积.

11. (2018. 天津大学) 已知曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2\leqslant R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，则求曲线积分 $\oint_L x^2\mathrm{d}s$.

12. (2018. 天津大学) 设 D 是 $x^2+y^2\leqslant 1$ 位于第一象限部分的区域，计算

$$\iiint_D x^2\ln(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

13. (2019. 浙江大学) 计算

$$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 是由 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right),C\left(x_3,y_3\right)$ 三点围成的三角闭区域.

14. (2019. 浙江大学) 证明 $I\left(x\right)=\displaystyle\int_0^{\infty}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x^2y^2}\mathrm{d}x$ 在 $x\geqslant 0$ 上一致收敛.

15. (2018. 浙江大学) 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}\frac{Rx\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半球面的上侧，R 为一常数.

16. (2019. 华中科技大学) 求二重积分

$$\iint_D \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域 D 是由 $x=0,y=0,x+y=1$ 围成.

17. (2019. 华中科技大学) 已知

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}\left(x^2+2xy+y^2\right)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_{(0,0)}^{(t,1)}\left(x^2+2xy+y^2\right)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

且积分与路径无关，求 $Q(x,y)$.

18. (2019. 华中科技大学) 已知 $\displaystyle\int_0^1 x^a f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 $J(y)=\displaystyle\int_0^1 x^y f(x)\mathrm{d}x$，证明：$J(y)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

19. (2019. 兰州大学) 求 $y^2=2ax,y^2=2bx,x^2=2cx,x^2=2dy\,(0<a<b,0<c<d)$ 的面积.

20. (2019. 兰州大学) 求 $\displaystyle\iint\limits_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 S 是不过 $(0,0,0)$ 封闭光滑外正.

21. (2018. 兰州大学) 计算曲面积分 $\displaystyle\iiint_S z\mathrm{d}S$，其中 S 是曲面 $x^2+z^2=2az(a>0)$ 被曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所截的部分.

22. (2018. 兰州大学) 计算曲线积分

$$\int_L[\varphi(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+\left[\varphi'(y)\sin x-\pi\right]\mathrm{d}y$$

其中 L 是从 $[\pi,1]$ 到 $[3\pi,4]$ 线段下面的一条曲线，且曲线与线段所围面积为 2，$\varphi(y)$ 是连续可微函数.

23. (2019. 东南大学) 计算

$$\iiint_{\Sigma}3x^2+2y+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $\Sigma:(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\leqslant 1$.

24. (2019. 东南大学) 计算

$$\iiint_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

其中 $\Sigma : x^2+2y^2+3z^2=1$ 的外侧.

25. (2019. 东南大学) 证明含参积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{x}\mathrm{d}x, y \geqslant y_0 > 0$ 一致收敛.

26. (2019. 东南大学) 讨论

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的敛散性, 其中 $f(x,y)$ 在任意有限闭区域内有界, 且 $0 < m \leqslant |f(x,y)| \leqslant M$.

27. (2018. 东南大学) 求笛卡儿叶形线 $x^3+y^3=3xy$ 在第一象限围成的面积.

28. (2018. 东南大学) 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} \left(2x+y^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(2y+z^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(2z+x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\Sigma : z = x^2+y^2, 0 \leqslant z \leqslant 1$，取外侧.

29. (2018. 东南大学) 计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} 2x^2+3y^2+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $\Omega : x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

30. (2019. 上海交通大学) 计算二重积分

$$\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 为 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的区域.

31. (2019. 上海交通大学) 计算曲线积分

$$\iint_S xy\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{e}^x \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 为 $x^2+z^2=1 \quad (0 \leqslant y \leqslant z)$ 的外侧.

32. (2019. 上海交通大学) 设无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，记 $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\sin(xt)\mathrm{d}t$，证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

33. (2019. 同济大学) 设 $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$g(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 $\Leftrightarrow f(0)=0$.

34. (2019. 华东师范大学) 设 $P(x,y,z)=Q(x,y,z)=R(x,y,z)=f((x^2+y^2)z)$，$f$ 有连续导数，求极限

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\iint_{\Omega} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{t^4}$$

其中 Ω 为圆柱 $\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant t^2, z\in[0,1]\}$ 的外表面, 方向取外侧.

35. (2018. 华东师范大学) 计算曲面积分

$$\iint_S \frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

其中 S 为下半球面 $z=-\sqrt{a-x^2-y^2}$ 的上侧，$a>0$ 为常数.

36. (2019. 厦门大学) 设 $f(x,y)$ 在 $B=\left\{(x,y);x^2+y^2\leqslant 1\right\}$ 上连续可微，且 $f\big|_{\partial B}=0$. 求

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iint_{\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

37. (2019. 大连理工大学) 求 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$ 相交面的面积.

38. (2019. 大连理工大学) 已知 $\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，求证 $\forall\,(s,t)\in\mathrm{R}^2$，证明

$$\int_a^s P(x,t)\,\mathrm{d}x+\int_b^t Q(a,y)\mathrm{d}y=\int_a^s P(x,b)\mathrm{d}x+\int_b^t Q(s,y)\mathrm{d}y$$

39. (2019. 大连理工大学) 计算

$$\int\limits_L \left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}z$$

其中 L 为沿着图像 $(1,0,0)\to(0,1,0)\to(0,0,1)\to(1,0,0)$ 的方向.

40. (2019. 大连理工大学) 判断 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin\left(xy^2\right)\arctan(xy)\mathrm{d}x$ 关于 $y>0$ 是否一致收敛，并说明理由.

41. (2019. 大连理工大学) 若 $h(s,t)$ 在 $I:[0,1]\times[0,1]$ 上连续，且 $I_n(s)=\displaystyle\int_0^{2\pi}h(t,s)\sin nt\mathrm{d}t$，求证：$\left\{I_n(s)\right\}$ 关于 s 一致收敛.

42. (2018. 大连理工大学) 计算二重积分

$$\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D=(x,y)|x^2+4y^2\leqslant 1$.

43. (2018. 大连理工大学) 计算第二型曲面积分

$$I=\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant h)$，方向取下侧.

44. (2019. 电子科技大学) 计算

$$I=\iint\limits_S \sin\sqrt{y^2+z^2}dydz+\sin\sqrt{z^2+x^2}dzdx+\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant h)$ 上侧.

45. (2019. 电子科技大学) 计算

$$I=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Ω为$x^2+y^2+z^2\leqslant 4z$.

46. (2019. 电子科技大学) 证明广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^y}\mathrm{d}x$， $y\in[y_0,+\infty)$ 一致收敛.

47. (2019. 武汉大学) 求 $\displaystyle\iiint_V\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 $V=x+y+z\leqslant 1,x,y,z\geqslant 0$.

48. (2019. 武汉大学) 计算 $\displaystyle\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 是不过原点的简单封闭曲线.

49. (2018. 武汉大学) 已知 $(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ ，其中 $u=\dfrac{1}{|x|}$ ，$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ ，计算：

$$\oiint_S\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial y_j}dS,i,j=1,2,3$$

其中 $S:x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2$

50. (2018. 武汉大学) 设 $u_i=u_i(x_1,x_2)\,,i=1,2$ 且关于每个变量均为周期 1 的连续可微函数, 求

$$\iint\limits_{0\leqslant x_1,x_2\leqslant 1}\det\left(\delta_{ij}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

其中 $\det\left(\delta_{ij}+\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$ 是映射 $x\to(x_1+u_1,x_2+u_2)$ 的雅克比行列式.

51. (2019. 中山大学) 计算第二型曲线积分

$$\oint_{\Gamma^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\left[(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2\right]},(\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$$

其中 Γ^+ 为椭圆 $(\alpha\delta+\beta\gamma)^2+(\gamma x+\delta y)^2=1$，取逆时针.

52. (2019. 中山大学) 求曲线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 所围面积.

53. (2019. 中山大学) 计算第一型曲线积分 $\displaystyle\oint_{\Gamma^+}\left(x^2+y^2+2z\right)\mathrm{d}s$，其中 Γ 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+y+z=0$ 相交的圆周.

54. (2019. 中山大学) 求第二型曲面积分 $\displaystyle\oiint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 是球面 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ 的外侧.

55. (2018. 中山大学) 计算二重积分

$$\iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

56. (2018. 中山大学) 计算曲线积分

$$\oint_L x^2yz\mathrm{d}x+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y+(x+y+1)\,\mathrm{d}z$$

其中 L 为曲面 $x^2+y^2+z^2=5$ 与 $z=1+x^2+y^2$ 的交线，从 oz 面正向看为顺时针.

57. (2019. 山东大学) 交换积分次序

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{4-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$$

58. (2019. 山东大学) 计算曲线积分

$$I=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

其中 L 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0$ 与柱面 $x^2+y^2=x$ 的交线，从 z 轴正向往下看，L 取反时针方向.

59. (2019. 山东大学) 证明：$\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in[0,\beta](\beta>0)$ 上一致收敛.

60. (2019. 湖南大学) 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\Sigma:(x-1)^2+(y-1)^2+\frac{z^2}{4}=1$.

61. (2019. 北京大学) 求函数 $f(x)=\frac{2x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ 在 $x=0$ 点的 Taylor 展开，其中 $\theta\in\mathbb{R}$ 是常数，并计算积分

$$\int_0^{\pi}\ln\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)\mathrm{d}\theta$$

62. (2019. 北京大学) 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，并计算：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(xy)}{x^2}\mathrm{d}x$$

63. (2018. 北京大学) 设 f 在 $(0,0)$ 附近三阶可微，计算

$$\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{R^4}\iint_D\left(f(x,y)-f(0,0)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$.

64. (2018. 中南大学) 设 V 为曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 所围区域，计算三重积分

$$\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

65. (2018. 中南大学) 计算第一型曲面积分

$$\int_{\Gamma}\sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s$$

其中 Γ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x=y$ 的交线在 $z\geqslant 0$ 的部分.

66. (2018. 中南大学) 设函数 $p(x)$ 具有连续导数，在围得原点在内部的任意光滑简单闭曲线 C 上的曲线积分

$$\oint\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$$

的值为常数（与闭曲线 C 的选取无关）.

(1) 设 C 为任意一条不含原点在内部的光滑简单正向闭曲线. 证明：

$$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$$

(2) 求函数 $p(x)$.

(3) 设 C 为围得原点在内部的光滑闭曲线，求

$$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$$

67. (2018. 中南大学) 已知是空间曲线 $\begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转而成的椭球面 S 表示曲面 Σ 上半部分，π 是椭球面 S 在 $P(x,y,z)$ 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 是原点到切平面 π 的距离，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 S 的外法线的方向余弦.

(1) 计算

$$\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$$

(2) 计算

$$\iint_S z(x\cos\alpha+3y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

68. (2018. 中国科学技术大学) 已知 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界域，$\vec{n}$ 为单位向量，求证：存在以 $\vec{n}$ 为法向量的平面平分 Ω 的体积.

69. (2018. 中国科学技术大学) 设 $\varphi(x)$ 为有势场 $F(x,y,z)=(x^2-y,y^2-x,-z^2)$ 下的势函数，求三重积分

$$\iiint_\Omega \varphi(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

70. (2018. 中国科学技术大学) 已知 $D_t=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1, y\geqslant t\right\}, f(t)=\iint_{D_t}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，计算 $f'(0)$.

71. (2018. 中国科学技术大学) 已知 $B_r=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqslant r^2\right\}, B=B_1, u(x,y)\in C(\bar{B})\cap C^2(B), \Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(1) 当 $\Delta u\geqslant 0, \forall(x,y)\in B$，证明 $u(x,y)$ 在 $\overline{B}$ 上的最大值于边界 ∂B 上达到;

(2) 当 $\Delta u=0, \forall(x,y)\in B$，证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r}u(x,y)\mathrm{d}S\right)=0, \forall r\in(0,1)$$

(3) 证明：

$$u(0)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r}u\,(x,y)\,\mathrm{d}S$$

72. (2018. 四川大学) 计算曲线

$$\oiint(z+y^2)\mathrm{d}s$$

其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线.

73. (2018. 四川大学) 计算曲面积分

$$\iint_S (x+y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(2y+\sin(x+z)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(3z+\mathrm{e}^{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外表面.

74. (2018. 南京大学) 设 $\Omega=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\phi(x)\leqslant y\leqslant \psi(x)\}$，且 $F(x,\phi(x))=0$，F 具有连续偏导数，证明：

$$\int_\Omega F^2\leqslant\int_\Omega\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2$$

75. (2018. 南京大学) 设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集，Ω 是 B 的边界，证明：

$$\int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial n}=\int_B u\Delta u+\int_B\|\nabla u\|^2$$

76. (2018. 南京大学) 设 $\Omega=\{(u,v,w)|0\leqslant u\leqslant x,0\leqslant v\leqslant y,0\leqslant w\leqslant z\},0\leqslant x,y,z\leqslant 1$，讨论方程

$$\phi(x,y,z)=x+\int_\Omega\phi(u,v,w)$$

是否有唯一解？有的话，请写出具体表达式.

77. (2018. 华南理工大学) 计算曲线积分

$$I=\int_L xy^2\mathrm{d}x-x^2y\mathrm{d}y$$

其中 L 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，方向为逆时针.

78. (2018. 华南理工大学) 计算曲面积分

$$I=\iint_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(x^2-z\right)y\mathrm{d}x\mathrm{d}z-x^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是 $x^2+y^2\leqslant 4z$ 在 $0\leqslant z\leqslant 1$ 部分的下侧.

79. (2018. 华南理工大学) 设 $I=\iiint_V(x+y-z+100)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 是 $x^2+y^2+z^2=3$ 的内部区域，试证明：

$$28\sqrt{3}\pi\leqslant I\leqslant 52\sqrt{3}\pi$$