第二部分《一元函数微分学》——数学考研真题集

微信公众号：八一考研数学竞赛

1. (2019. 北京师范大学) 求函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式.

2. (2019. 北京师范大学) 若 $f(x)=x^4-2x^2$，讨论 $f(x)$ 的单调性、凹凸性和极值.

3. (2018. 中国科学院大学) 求曲线 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上的点，使得曲线在该点处的法线被曲线所截得的线段长度最短.

4. (2018. 中国科学院大学) 设 $x>0$，证明

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta}}$$

其中 $\theta=\theta(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$.

5. (2019. 天津大学) 求 $f(x)=\dfrac{10\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$ 的最大值.

6. (2019. 天津大学) 对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 有定义，已知 $\left|f(x)-f(y)\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\left|x-y\right|$，证明：对任意 $\lambda>\dfrac{1}{2}$，使得 $f(x)-\lambda x=0$ 有实根.

7. (2018. 天津大学) 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x(t+\sin\frac{1}{t})\mathrm{d}t$，且 $f(0)=0$，求 $f'(0)$.

8. (2019. 华中科技大学) 若 $f(x)$ 二阶可导且在 $x\in(0,1)$ 上有最大最小值，证明：$\exists y\in(0,1)$ 使得 $f''(y)=f'(y)$.

9. (2019. 华中科技大学) 已知 $f(x)>0, f(x)$ 连续. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上为单调增函数.

10. (2019. 上海交通大学) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可微，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)-3(f(\xi)-\xi)=1$.

11. (2019. 上海交通大学) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$，且 $f(x)>0$，证明 $F(x)=\dfrac{\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为严格单调递增的函数，如果要使 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为严格单调递增的函数，试问应补充定义 $F(0)$ 为多少.

12. (2019. 北京大学) 设定义 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，$f''(x)$ 有界，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

13. (2018. 北京大学) 若 $f\in\mathbb{C}(0,1),\alpha=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\beta=\dfrac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_2}, x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,1)$，试证：对 $\forall\lambda\in(\alpha,\beta)$，$\exists x_5,x_6\in(0,1)$，使得

$$\lambda=\frac{f(x_6)-f(x_5)}{x_6-x_5}$$

14. (2019. 东南大学) 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 二阶可微, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 均收敛且相同, 证明: 存在 $\xi\in(a,+\infty)$ 使得 $f''(\xi)=0$.

15. (2019. 同济大学) 设定义 $f(x)$ 是在定义在实数集上的函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

说明 α 取何值时，(1)$f(x)$ 连续；(2)$f(x)$ 可导；(3)$f(x)$ 导函数连续.

16. (2019. 华东师范大学) 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 且 $g(0)=g'(0)=0$，$g''(0)=2$，求 $f'(0)$

17. (2019. 华东师范大学) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，$f(a)=0$，存在实数 $A>0$，使得 $\forall x\in[a,b],\left|f'(x)\right|\leqslant A\left|f(x)\right|$. 证明：$f(x)\equiv 0(x\in[a,b])$.

18. (2019. 厦门大学) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)$ 连续，$f(f(x))=x$，试证：至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.

19. (2019. 厦门大学) 设 $f(x)$ 在 $x=c$ 右可微，即 $\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ 存在，且大于零. 证明：

$$\exists\delta>0,\ \text{s.t. } \forall t\in(c,c+\delta), f(t)>f(c)$$

20. (2018. 华中师范大学) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(b)>0, \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{x-a}<0$

    (1) 方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根；

    (2) 方程 $f(x)f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$ 在 (a,b) 内至少有两个不同的实根.

21. (2019. 电子科技大学) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $\left|f'(x)\right|<1,\left|f''(x)\right|<1$, 证明 $\left|f'(x)\right|<\dfrac{5}{2}$.

22. (2019. 武汉大学) 若 $f(x)$ 连续可微，$f(0)$ 不为 0，其中 Maclaurin 级数（Cauchy 余项）

$$f(x)=f(0)+f^{'}(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\theta=1-\sqrt[n]{\dfrac{1}{n+1}}$.

23. (2018. 武汉大学) 设

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处任意阶导数数存在.

24. (2018. 兰州大学) 已知 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的单调递增函数，满足 $f(a)\geqslant a, f(b)\leqslant b$，证明存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=\xi$.

25. (2018. 兰州大学) 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，且 $\varepsilon(x)=f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 单调递减，证明：$f(x)\equiv 0$.

26. (2018. 南京大学) 设 $f(x)=\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$，求 $f(x)$ 的 Taylor 公式，并计算 $\ln 2$ 的近似值.

27. (2018. 南开大学) 求 $f(x)=4\ln x+x^2-6x$ 的极值.

28. (2018. 南开大学) 若 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二次连续可导，且 $f(-2)=f(2),|f''(x)|\leqslant M$，证明 $|f'(0)|\leqslant M$.

29. (2018. 南开大学) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续，证明：存在常数 $M>0$，使得对任意 $x>0,h>0$，都有

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant M(h+1)$$

30. (2019. 中山大学) 设 $f(x)=\dfrac{x^4}{1+x^3}$，求 $f^{(n)}(0)$.

31. (2019. 中山大学) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=A$，求证：$f'(0)$ 存在，且 $f''(0)=A$.

32. (2018. 大连理工大学) 设定义在 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0,\left|f(x)\right|\leqslant M|x|$，其中 $|x|<1,M>0$ 是常数. 证明：$F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $F'(0)$.

33. (2018. 大连理工大学) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上三阶可导，且 $f'''(x)\geqslant0$，证明：对任意的 $x_1<x_2$，有

$$f(x_2)-f(x_1)\geqslant f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)(x_2-x_1)$$

34. (2018. 四川大学) 设 $f(x)=|\ln|x||$，求 $f'(x)$.

35. (2018. 四川大学) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，且 $f(a)\geqslant a,f(b)\leqslant b$. 证明：存在 $c\in[a,b]$，使得 $f(c)=c$.

36. (2018. 四川大学) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且在所有零点处导数不等于 0，证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有有限个零点.

37. (2019. 湖南大学) 若 $F'(x)=\sin x^2$，求 $\dfrac{\mathrm{d}F(\cos x)}{\mathrm{d}x}$;

38. (2019. 湖南大学) 若函数 $f(x)$ 处处可导，且有 $|f'(x)|\leqslant\lambda|x|$ 以及 $g(x)=f^2(x)$，则试证：

    (1) $\mathrm{e}^{-2\lambda x}g(x)$ 单调递减； (2) $f(x)\equiv0$.

39. (2018. 中国科学技术大学) 设 $f(x)\in\mathbb{C}^2[0,1]$，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)$ 在 x_0 处取得最小值 -1

    (1) 求 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 Lagrange 余项的 Tarlor 展开式；

    (2) 证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)=8$.

40. (2018. 中南大学) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，且

$$f''(x)>0,\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$$

又存在 x_0 使得 $f(x_0)<0$，证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恒有 2 个根.

41. (2018. 中南大学) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$，求 $f^{(n)}(0)$.