第三部分《一元函数积分学》——数学考研真题集

微信公众号：八一考研数学竞赛

1. (2019. 北京师范大学) 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$.

2. (2019. 北京师范大学) 判断反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}\ln^2(1+x)}\mathrm{d}x$ 敛散性.

3. (2019. 中国科学院大学) 求下列定积分

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos x}\mathrm{d}x, a>1$$

4. (2018. 中国科学院大学) 设 $x>0$，证明计算不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^6 x+\cos^6 x}.$$

5. (2018. 中国科学院大学) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二次连续可微，$f(0)=0$，证明：

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{3}, \quad \text{其中} M=\max_{x\in[-1,1]}\left|f''(x)\right|.$$

6. (2018. 中国科学院大学) 证明

$$\frac{1}{5}<\int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{x^2-x+25}}\,\mathrm{d}x<\frac{2\sqrt{11}}{33}.$$

7. (2019. 南开大学) 证明广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{2x+3\sin x}\mathrm{d}x$$

收敛.

8. (2019. 南开大学) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微且不恒等于 0，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$，证明：

$$\int_0^1 \left|f(x)\right|\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x>2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

9. (2018. 东南大学) 计算

$$\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} x^4\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x$$

10. (2018. 东南大学) 证明 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

11. (2018. 东南大学) 讨论 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x$ 敛散性 $(p>0)$.

12. (2018. 东南大学) 计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\mathrm{d}x\,(b\geqslant a>0)$$

13. (2019. 天津大学) 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 单调，满足

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x$$

根据上述积分第二中值定理证明，若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积，$g(x)$ 单调有界，证明 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

14. (2018. 天津大学) 计算定积分 $\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

15. (2018. 天津大学) 函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，证明：对任意的 $\alpha\in(0,1)$ 都有

$$\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

16. (2019. 浙江大学) 计算 $I_n = \int_0^n x^{a-1}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$

17. (2019. 浙江大学) 计算 $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

18. (2019. 浙江大学) 对于函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，证明函数 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充分必要条件是：$f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

19. (2019. 兰州大学) 判断反常积分的敛散性

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x\,(p>0)$$

20. (2019. 兰州大学) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，对 $\forall a\in(0,1)$，试证：

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

21. (2018. 兰州大学) 求定积分

$$\int_0^{\pi} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

22. (2018. 兰州大学) 已知 α 是实数，讨论反常积分 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

23. (2019. 上海交通大学) 求不定积分

$$\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

24. (2019. 同济大学) 若 f,g 在 $[a,b]$ 上可积，证明存在一个连续函数列 $\{f_n(x)\}$，使得下列等式成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

25. (2019. 华东师范大学) 求积分的值.

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

26. (2019. 华东师范大学) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

27. (2019. 华东师范大学) 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{\alpha-1}|\ln x|^n\mathrm{d}x\,(\alpha>0, n\in\mathbb{Z}_+)$ 的敛散性.

28. (2019. 华东师范大学) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(x)\neq 0(x\in(0,1))$ 且 $\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x$ 存在. 试证：

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x \geqslant 4$$

29. (2018. 华东师范大学) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0, 0\leqslant f'(x)\leqslant 1$，试证：

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

30. (2019. 厦门大学) 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上严格单调递减，试证：

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x > 0$$

31. (2019. 厦门大学) 设 $f\in C[0,1]$，试证：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f\left(x^n\right)\mathrm{d}x = f(0)$$

32. (2019. 大连理工大学) 若 $f(t)$ 是周期函数，求证

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

33. (2018. 大连理工大学) 设 $f(t)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\sin t\mathrm{d}x$，试证：$f(t)$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

34. (2018. 大连理工大学) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续凸函数，试证：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

35. (2019. 电子科技大学) 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos^2 x\mathrm{d}x$.

36. (2019. 电子科技大学) 证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$ 收敛.

37. (2019. 武汉大学) 计算 $\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

38. (2018. 武汉大学) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，$\varphi(x)$ 是周期为 T 的连续函数.

(1) 证明存在阶梯函数使得 $g_\varepsilon(x)$ 使得 $\int_a^b |f(x)-g_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \varphi(nx)\mathrm{d}x$

(3) 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\varphi(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(4) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}\displaystyle\int_0^T\frac{\varphi(nx)}{x}\mathrm{d}x$，其中函数$\dfrac{\varphi(nx)}{x}$

39. (2019. 中山大学)$\displaystyle\int\frac{1}{x(x^{10}+1)}\mathrm{d}x$

40. (2019. 山东大学) 求不定积分

$$\int\frac{1}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$$

41. (2019. 山东大学) 证明：广义积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}[(1-\frac{\sin x}{x})^{-\frac{1}{3}}-1]\mathrm{d}x$ 条件收敛.

42. (2019. 湖南大学) 求不定积分 $\displaystyle\int\arcsin x\mathrm{d}x$

43. (2019. 北京大学) 设 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln x$，计算 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

44. (2018. 中国科学技术大学) 设 $\Phi(x)$ 为周期 1 的黎曼函数，计算积分 $\displaystyle\int_0^1\Phi(x)\mathrm{d}x$.

45. (2018. 四川大学) 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}$

46. (2018. 四川大学) 设 $a,b\in\mathbb{R}$，讨论积分

$$\int_0^{\infty}x^a\sin x^b\mathrm{d}x$$

的敛散性 (包括条件敛散与绝对敛散).

47. (2018. 四川大学)Riemann 函数 $R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p},x=\dfrac{p}{q}\left(p\in\mathbb{N}^{+},q\in Z,p,q\text{互质}\right)\\ 0,x\text{为无理数}\end{cases}$$

试证：

(1) $R(x)$ 在任意一点 $x_0\in\mathbb{R}$ 处有极限，在所有无理数点连续，所有有理数点为可去间断点.

(2) $R(x)$ 在 R 上处处不可导

(3) $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积.

48. (2018. 华南理工大学) 计算定积分

$$I=\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x$$

49. (2018. 华南理工大学) 设非负函数列 $f_n(x)$ 中的每个 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界可积，且对任意的 $c\in(0,1)$，$f_n(x)$ 在 $[c,1]$ 一致收敛于零，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=1$，试证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(\frac{f_n(x)\sin 2x}{x}\right)\mathrm{d}x=2$$