第一部分《极限》——数学考研真题集

微信公众号：八一考研数学竞赛

1. (2019. 北京师范大学) 计算

   (1) 求极限
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

   (2) 已知 $x_1\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}^+$，数列 x_n 满足 $x_{n+1}=\cos x_n$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

2. (2019. 北京师范大学) 设 $f(x)=\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2, g(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. (2019. 中国科学院大学) 求极限
   $$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$$

4. (2019. 中国科学院大学) 已知 $0\leqslant a\leqslant 1,b\geqslant 2$ 有序列 $\{x_n\},n=1,2,\cdots$，满足递推关系：
   $$x_{n+1}=x_n-\frac{1}{b}(x_n^2-a),x_0=0$$
   证明：有序列 $\{x_n\}$ 收敛，并求它的极限值.

5. (2018. 中国科学院大学) 计算极限

   (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$；

   (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{2+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$.

6. (2018. 中国科学院大学) 求三个实常数 a,b,c，使得下式成立
   $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan x-ax}\int_b^x\frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\,\mathrm{d}s=c.$$

7. (2019. 南开大学) 求极限
   $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln(n+1)-\ln n}-n\right]$$

8. (2019. 南开大学) 已知 α,β 均为正实数，且 $\max\{\alpha,\beta\}>1$，试证：
   $$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{x^\alpha+t^\beta}\mathrm{d}t=0$$

9. (2018. 南开大学) 函数 $f(x)$ 在 $[a,+)$ 上可导，$g(x)$ 在 $[a,+)$ 上连续且恒大于 0，且广义积分 $\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ 发散，若 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+\frac{f'(x)}{g(x)}]=0$，证明：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

10. (2019. 天津大学) 已知 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的无穷邻域内存在，且 $f(0)=0$，求
    $$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{2n}{n^2}\right)-2n\right]$$

11. (2019. 天津大学) 计算极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)$.

(3) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^{\alpha}}\mathrm{d}x$.

12. (2019. 华中科技大学) 求下列数列和函数极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}+2^{\sqrt{2}}+\cdots+n^{\sqrt{2}}}{n^{\sqrt{2}+1}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2-x^4\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]$.

13. (2019. 同济大学) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\alpha x_n+1)=A,(\alpha>1)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{A}{1+\alpha}$.

14. (2019. 兰州大学) 计算极限

(1) $\lim\limits_{k\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^2+3k+1}{(k+2)!}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}}{x\sin x}$.

15. (2019. 兰州大学) 若 $f(x)$ 有限开区 (a,b) 连续，证明:$f(x)$ 在 (a,b) 一致连续，当且仅当 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在且有界.

16. (2018. 兰州大学) 计算极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$.

17. (2018. 兰州大学) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且对任意固定的 $x>0$，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x+n)=0(n\in\mathbb{N}^+)$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

18. (2019. 东南大学) 计算极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2\sin x}\left(x-\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)$;

19. (2019. 东南大学) 设非负数列 $\{a_n\}$ 单调递减.

(1) 若 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 收敛, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$;

(2) 若将单调性去掉，(1) 是否成立? 说明理由, 不存在则给出反例;

(3) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$ 能否得到 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 收敛?

20. (2018. 东南大学) 计算极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\frac{1}{n^2+k}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]$;

21. (2018. 东南大学) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 一致连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在.

22. (2019. 上海交通大学) 计算极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{\tan\left(x^2\right)}$;

(2) $\int\frac{\arcsin e^x}{e^x}\mathrm{d}x$.

23. (2019. 上海交通大学) 设 a 为实数，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-x_{n-1}\right)=a$，用 $\epsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=a$.

24. (2019. 大连理工大学) 已知 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

25. (2018. 大连理工大学) 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^4\left(\cos\frac{1}{n}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n^2}}\right)$

26. (2018. 大连理工大学) 若非负数列 $\{x_n\}$ 满足 $2x_{n+2}\leqslant x_{n+1}+x_n, n\geqslant 1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

27. (2019. 电子科技大学) 计算极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$;

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}\mathrm{d}x$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\left(\sin x\right)-\cos x}{x^4}$.

28. (2019. 电子科技大学) 若 $x_{n+1}=a+q\sin x_n, x_0=a, 0<q<1$，证明 x_n 极限存在.

29. (2019. 武汉大学) 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$.

30. (2018. 武汉大学) 计算极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^\pi\sin^n x\cos^6 x\mathrm{d}x}{\int_0^\pi\sin^n x\mathrm{d}x}$;

(3) 已知 $x_{n+1}=\ln\left(1+x_n\right)$，且 $x_1=0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$.

31. (2019. 中山大学) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k>0$，k 是固定自然数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_k}}{n}\right)^n$.

32. (2019. 中山大学) 计算极限：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)$，其中 $a>0$.

33. (2019. 中山大学) 计算极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Gamma\frac{2nx}{1+n^2y^2}\mathrm{d}y$，其中 Γ 为沿 $y=x^2$ 从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的弧.

34. (2019. 中山大学) 极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right)$ 是否存在？试说明理由.

35. (2019. 中山大学) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A$，求证：$f'(0)$ 存在，且 $f''(0)=A$.

36. (2019. 中山大学) 计算极限：

(1) $\lim_{x\to\infty}(1+\tan x)^{\frac{2018}{x}}$;

(2) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n})$.

37. (2019. 湖南大学) 用定积分求解极限: $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2\cdots+(2n)^2}$

38. (2019. 湖南大学) 若正项数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1(n=1,2,\cdots)$，试证：$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限.

39. (2018. 浙江大学) 计算极限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$;

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+\tan^2 x-(\mathrm{e}^x-1)^5}$;

40. (2018. 浙江大学)

(1) 用极限定义叙述：$\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq+\infty$

(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin}{\sqrt{x}+1}\neq+\infty$.

41. (2018. 中国科学技术大学) 计算极限：$\lim_{x\to-\infty}|x|^{\arctan x+\frac{\pi}{2}}$

42. (2018. 北京大学) 证明以下极限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\int_0^1\frac{\sin^n(x)}{x^n}\mathrm{d}x\right)^n=+\infty$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\frac{\sin(x^n)}{x^n}\mathrm{d}x\right)^n=\prod_{n=1}^{\infty}\exp\left(\frac{(-1)^k}{2k(2k+1)!}\right)$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2-k}{n^2}\right)=\ln 2+2-\frac{\pi}{2}$.

43. (2018. 四川大学) 证明：对任意正整数 n，$x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在 $[0,1]$ 存在唯一根 x_n，并求 $\lim_{n\to+\infty}x_n$.