准考证号：______ 姓名：______ 学校：______ 省市：______

装 订 线 内 不 要 答 题

第十一届全国大学生数学竞赛模拟赛

非数学类, 2019 年 10 月 26 日

作者：胡八一

考试形式：闭卷 考试时间：150 分钟 满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
满 分	24	8	14	12	14	14	14	100
得 分								

注意：1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	评卷人	复核人

一、填空题（本题满分 24 分，每题 6 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\arctan nx\left(\sin^2(\pi m!x)\right)}{\pi}=$______，其中 $x\in\mathbb{R}$.

2. 已知 $\begin{cases} xu+yv=0 \\ yu+xv=1 \end{cases}$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$______.

3. 计算定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\arctan\sqrt{\frac{\cos 2x}{2\cos^2 x}}\mathrm{d}x=$______.

4. 求微分方程 $x^2y''-2xy'+2y=x^2(x-1)$ 的通解为______.

二、解答题 (本题满分 8 分) 设 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，从 x 轴的正向去看它的逆时针方向取为正向，计算曲线积分 $=\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$

三、解答题 (本题满分 14 分) 设 $f\in C^1[0,1]$，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le\frac{1}{12}\int_0^1\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x.$$

请给出至少两种方法进行证明.

四、解答题 (本题满分 12 分) 计算

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{2x}{R^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{2y}{R^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{2z}{R^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$

五、解答题 (本题满分 14 分) 设 $f(x,y)$ 在原点附近二次连续可微，证明

$$f''(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(2h,e^{-\frac{1}{2h}}\right)-2f\left(h,e^{-\frac{1}{h}}\right)+f(0,0)}{h^2}$$

六、解答题 (本题满分 14 分) 若二元函数 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_x(x,y)$ 在矩形区域 $\Omega=[a,b]\times[c,d]$] 上连续，则函数 $g(x)=\displaystyle\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $\dfrac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}=\displaystyle\int_c^d f_x(x,y)\,\mathrm{d}y$.

七、解答题 (本题满分 14 分) 讨论级数

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos n\theta}{n}(\theta\in\mathbb{R})$$

收敛性，并求级数的和.